Slordig rekenen met procenten

Nico Smets

May 22, 2012

1 Inleiding

In het verleden heb ik al wel eens gevallen opgemerkt waarbij er op een slordige wijze met procenten gerekend werd. Vaak heb ik dit in stilzwijgen bij benadering aanvaard, maar ik heb toch altijd eens willen kijken hoe groot de fout is die er mee gemaakt wordt. De formulering die ik vond was eigenlijk nog redelijk verrassend en interessant, vandaar dat ik het even uitgeschreven heb. Het resultaat vind je in de volgende tekst. Bij het slordig rekenen met procenten kan ik twee slordige bewerkingen bedenken (misschien zijn er meer), die tevens leiden tot dezelfde formulering.

1.1 Geval 1

Een eerste voorbeeld van slordig rekenen is het procent op de verkeerde basis zetten. Als we bvb van 100 naar 90 gaan, is dit -10%. De omgekeerde bewerking van 90 naar 100 is natuurlijk geen +10%, alhoewel het verleidelijk is om er "ongeveer +10%" voor te gebruiken. Van 90 naar 100 is meer precies +11,111...%.

$$90 \xrightarrow[\xleftarrow[p=-10\%]{}]{\substack{p^* = +10\% \\ p = +11,111...\%}} 100. \tag{1}$$

Een typisch geval waar al eens fouten tegen gemaakt worden is het aftrekken van BTW. Als we bvb de BTW willen aftrekken van 121, dan is het niet correct om -21% te doen. Het is -17,36% dat we moeten aftrekken.

$$100 \xleftarrow[\substack{p = -17,36\% \\ p^* = -21\%}]{\overrightarrow{p = +21\%}} 121. \tag{2}$$

Dit geval kan ook anders bekeken worden, namelijk: wat is de omgekeerde bewerking van $+21\%$, hetgeen in dit geval dan -17,36% is.

1.2 Geval 2

Als er een omgekeerd evenredig verband is, kan men ook al eens op slordige wijze rekenen met procenten. Dit ben ik al eens tegengekomen in boeken over economie waar er niets gezegd werd over de eventuele fout die erbij komt kijken.

Als de noemer van een breuk kleiner wordt, dan zal de waarde van de totale breuk groter worden en omgekeerd. Het is echter niet zo dat als de noemer daalt met 10%, de totale breuk stijgt met 10%. De totale breuk zal in dit geval stijgen met $\frac{1}{1-0,1} - 1 = 11,111...\%$, hetgeen inderdaad weer ongeveer 10% is.

$$\frac{100}{100} \xrightarrow[\xleftarrow[p=-10\%]{}]{\substack{p^{*=} + 10\% \\ p = +11,111...\%}} \frac{100}{90}. \tag{3}$$

Een voorbeeld hier is: Als je 10% minder snel reist (-10%), dan is he reistijd $+10\%$ langer. Dit is namelijk ook niet correct. De reistijd is namelijk $+11,111...\%$ langer. ($\Delta t = \frac{\Delta x}{v}$)

$$\frac{100\,\mathrm{km}}{100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{u}}} = 1\,\mathrm{u} \xrightarrow[\xleftarrow[p=-10\%]{}]{\substack{p^{*=} + 10\% \\ p = +11,111...\%}} \frac{100\,\mathrm{km}}{90\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{u}}} = 1,111\,\mathrm{u}. \tag{4}$$

2 Formulering

2.1 Notatie

Het correct percentage noteren we p, hiermee komt een groeifactor g overeen.

p: percentage (positief of negatief)

$g = 1 + p$: groeifactor

Het "slordig" percentage noteren we p^*, hiermee komt een "slordige" groeifactor g^* overeen.

p^*: slordig percentage (positief of negatief)

$g^* = 1 + p^*$: slordige groeifactor

2.2 Verbanden

Om redenen van vooral luiheid hebben we in eerste instantie slechts het slordige percentage p^*. Wat is dan het overeenstemmende correcte percentage p? De basisformule is relatief eenvoudig te bepalen als

$$1 + p = \frac{1}{1 - p^*} \tag{5}$$

of anders geschreven

$$p = \frac{p^*}{1 - p^*}. \tag{6}$$

Als we kijken naar formule 5 zien we dat het een hyperbolisch verband is. De hyperbool is gespiegeld om y-as (vanwege het min-teken) en in x en y richting verschoven over een afstand van 1, zodat de hyperbool door de oorsprong gaat, zie figuur 1. De tak rechtsbeneden is minder belangrijk (deze is voor als het resultaat van de procentuele bewerking van teken verandert). Als we inzoomen op de linkertak krijgen we figuur 2, waar ook p^* is weergegeven als goede benadering van p rond de oorsprong.

Formule 6 kunnen we complexer maar weliswaar interessanter schrijven. Door gebruik te maken van een geometrische machtreeks

$$\frac{1}{1 - p^*} = 1 + p^* + p^{*2} + p^{*3} + p^{*4} + \ldots. \tag{7}$$

kunnen we formule 6 schrijven als

$$p = p^* + p^{*2} + p^{*3} + p^{*4} + p^{*5} + \ldots. \tag{8}$$

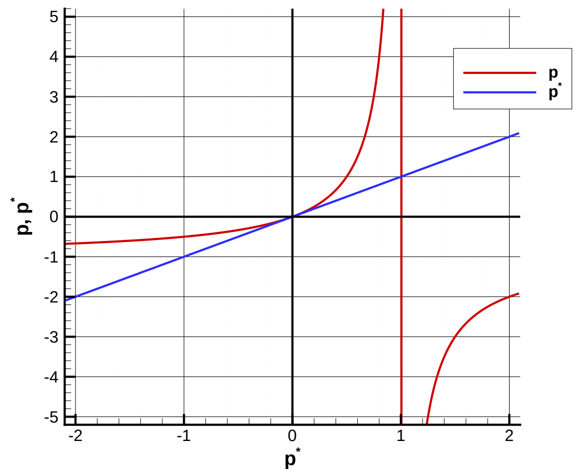

Figure 1: Verband tussen p en p^*.

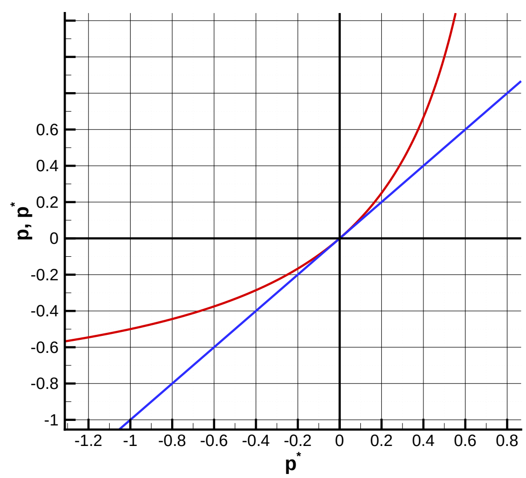

Figure 2: Verband tussen p en p^*, ingezoomd rond oorsprong. p^* als goede benadering van p rond de oorsprong.

of ook

$$p = p^*(1+p^*(1+p^*(...(1+p^*(1+p^*(1+p^*)))))). \quad (9)$$

Hier zien we dat bij het gebruik van slordige procenten, de correctie die we nodig hebben op onze slordige procent, diezelfde slordige procent is. Op deze laatste slordige procent is dan weer een correctie nodig van diezelfde slordige procent, en zo tot in het oneindige. Dit is ook te zien in het voorbeeld met vergelijking 1 waar we bij de slordige $p^{*=}+10\%$ ook $+10\%$ fout op deze laatste $+10\%$ rekenen, en zo recursief toegepast, hetgeen het correcte percentage bengt op $p = +11,111...\%$.

We kunnen dit verband in vergelijking 9 eventueel ook schijven met een recurrente vergelijking

$$p_n^* = p^*(1 + p_{n-1}^*) \quad (10)$$

met

$$p_0^* = p^*$$

als startwaarde.

De Steady State van vergelijking 10 is

$$p_\infty^* = \frac{p^*}{1-p^*} = p$$

hetgeen dus geconvergeert is naar p.

3 Quantisering van de fout

Nu we zowel het slordige percentage p^* als het correcte percentage p kennen, kunnen we de relatieve fout F' tussen beide berekenen. Het resultaat is verrassend eenvoudig.

$$F' = \frac{p^*-p}{p} = -p^*.$$

Het slordige percentage p^* valt te corrigeren, zie formule 9 of 10. Als we zo oneindig veel correcties doen, convergeert p^* naar p. We gaan p^* 1 keer corrigeren. Dit geeft $p_1^* = p^*(1+p^*)$. De fout F_1' die we nu krijgen tussen het slordige percentage p_1^* en het correcte percentage p is

$$F_1' = \frac{p_1^*-p}{p} = -p^{*2}.$$

Verder kunnen we ook aantonen dat

$$F_2' = \frac{p_2^*-p}{p} = -p^{*3},$$

of meer algemeen

$$F_i' = \frac{p_i^*-p}{p} = -p^{*i+1},$$

met $i = 0, 1, 2, ...$

In plaats van de fout op het percentage te bekijken is het beter om naar de relatieve fout op het resultaat dat berekend is met de percentages te kijken. Als de bewerking gebeurt op een getal A, kunnen we de volgende fout F definiëren

$$F = \frac{Ag^*-Ag}{Ag} = -p^{*2}.$$

Ook hier is het resultaat dus verrassend eenvoudig. We kunnen ook hier het slordig percentage éénmaal corrigeren:

$$F_1 = \frac{Ag_1^*-Ag}{Ag} = -p^{*3}.$$

Meer algemeen hebben we nu

$$F_i = \frac{Ag_i^*-Ag}{Ag} = -p^{*i+2},$$

met $i = 0, 1, 2, ...$. F blijkt dus telkens een orde hoger te zijn dan F'. Zo lang $p^* < 1$ is het interessant dat de macht zo hoog mogelijk is (kleinere F_i).

De fouten zijn te zien in figuur 3.

In figuur 3 is te zien dat als $p^* = 20\%$, de fout $F = 4\%$ (grafiek $-p^{*2}$ aflezen). Als we de eerste graads correctie $p_1^* = p^*(1+p^*)$ gebruiken is bij $p_1^* = 24\%$ ($p^* = 20\%$) de fout $F_1 = 0,8\%$ (grafiek $-p^{*3}$ aflezen). We kunnen zelfs tot $p_1^* = 67,95\%$ ($p^* = 46,41\%$) vooraleer dat de fout F_1 groter dan 10% wordt.

4 Besluit

Als het slordig percentage p^* klein genoeg is, is de gemaakte fout F relatief klein. Als een eerste orde gecorrigeerde slordige procent p_1^* gebruikt wordt, zijn de fouten zelfs nog kleiner.

Deze resultaten lijken mij erg voordelig. Ik zal in het vervolg mij niet inhouden om slordig te rekenen met procenten.

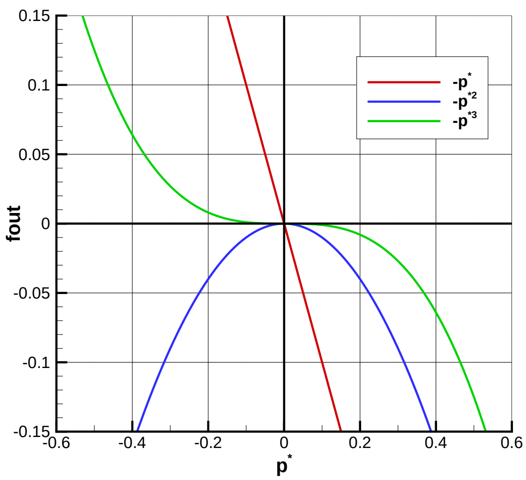

Figure 3: Fouten bij het rekenen met slordige procenten.

5 Opmerking

Merk op dat 2 slordige percentages elkaar kunnen compenseren. Als we kijken naar de voorbeelden in vergelijking 3 en 4 (van rechts naar links) zien we dat als we het percentage van de noemer gebruiken EN het op de verkeerde basis zetten, dat het resultaat toch correct is, zijnde -10% in die gevallen.